Analytische Geometrie

Ellipsen

Theorie Teil 1

Ellipse als gestreckter Kreis
Ellipsengleichungen
Konstruktionen

Datei Nr. 23111

1

17. August 2024

Friedrich Buckel

Demo-Text für www.mathe-cd.de

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Vorwort

Ellipsen stehen kaum mehr im Lehrplan wie um 1980, als die Analytische Geometrie mit Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln noch ausführlicher Abiturstoff waren. Die ***Internetbibliothek für Schulmathematik*** bietet auf ihrer Mathe-CD dennoch einige Texte an, für Interessierte, für Studenten oder für Schüler, die es noch immer lernen müssen / dürfen.

Wegweiser durch die Ellipsentexte

Der im vorliegenden Text 23111 gezeigte Lehrgang definiert die Ellipse als affines Bild des Kreises. Dazu wird ein Kreis in y-Richtung gestreckt oder gestaucht. Damit kann man hervorragend Ellipsenpunkte konstruieren. Außerdem werden Gleichungen besprochen, die zu Ellipsen gehören, die verschoben sind.

Der **Text 23112 Ellipsen 2 zeigt** die Konstruktion von Krümmungskreisen, mit denen man die Krümmung an den vier Scheiteln besser darstellen kann.

Im Text 23113 Ellipsen 3 wird die Ellipse als Menge aller Punkte definiert, die von zwei sogenannten Brennpunkten stets die gleiche Abstandssumme (2a) haben. Dies führt auf anderem Wege zu Ellipsengleichung. Dazu gibt es dann Konstruktionen. Dazu wird auch der **Leitkreis** eingeführt. Mit ihm kann man Ellipsenpunkte und **Tangenten** konstruieren.

Im Text 23114 werden Tangenten behandelt. Die wichtigste Konstruktionsmethode setzt die Kenntnis von Text 23111 voraus (affine Abbildung).

Ein fünfter Text steht im Ordner 54_Algebraische Kurven: 54060 Ellipsen.
Ellipsen sind sogenannte algebraische Kurven 2. Ordnung. Deren Kurvenuntersuchungen werden in den Texten dieses Ordners mit Hilfe der Methoden der Differentialgeometrie durchgeführt.
Der Text 54060 Ellipsen enthält eine Übersicht über verschiedene Gleichungsarten (auch Parametergleichungen und Gleichungen mit Polarkoordinaten) sowie weitere Untersuchungen, die über die obigen 3 Texte hinausgehen.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Inhalt

Datei 23111

Vorwort 2

§ 1 Ellipse als (affines) Streckbild eines Kreises

1.1 Voraussetzung 1: Kreisgleichungen 5
1.2 Voraussetzung 2: Streckung in y-Richtung 7
1.3 Ellipse als senkrecht-affines Bild eines Kreises 10
1.4 Allgemeine Gleichung einer Ursprungsellipse 13
1.5 Konstruktion von Ellipsenpunkten: Fähnchen-Konstruktion 17

§ 2 Verschobene Ellipse

2.1 Die Mittelpunktsgleichung 20
2.2 Ausmultiplierte Ellipsengleichungen 22

Datei 23112

§ 3 Krümmungskreise als Zeichenhilfe für Ellipsen

Datei 23113

§ 4 Definition der Ellipse durch Brennpunkte. 4

4.1 Definition der Ellipse über eine Abstandssumme, Eigenschaften 4
4.2 Herleitung der Mittelpunktsgleichung aus der Abstandssumme 5
4.3 Gärtnerkonstruktion der Ellipse 7
4.4 Zirkelkonstruktion von Ellipsenpunkten 9

§ 5 Leitkreiskonstruktionen (auch Tangenten) 11

5.1 Die Leitkreisfigur (LKF) 11
5.2 Winkel in der Leitkreisfigur 16
5.3 Konstruktion von Ellipsenpunkten mit der LKF 15
5.4 Tangentenkonstruktion mit der LKF 15
5.5 Tangente parallel zu einer Geraden 16
5.6 Tangente von einem Punkt Q an die Ellipse 17
5.7 Noch etwas Interessantes 18
Anwendung: Tangentenkonstruktionen 20

Datei 23114

§ 6 Tangenten und Streckungen 4

6.1 Wiederholung und Zusammenfassung 4
6.2 Aus Kreistangente wird Ellipsentangente 5
6.3 Gleichung einer Kreistangente 7
6.4 Gleichung einer Ellipsentangente 8
6.5 Konstruktion einer Ellipsentangente parallel zu g 11
6.6 Gleichung einer Ellipsentangente parallel zu g 13
6.7 Die allgemeine Tangentenbedingung 14
6.8 Tangente von Q an die Ellipse (Konstruktion) 15
6.9 Tangente von Q an die Ellipse (Rechnung) 17

§ 7 Konjugierte Durchmesser 21

7.1 Grundlagen 21
7.2 Folgerungen 22
7.3 Tangente parallel zu g 23

§ 8 Spezielle Aufgaben zu Tangenten (Lösung mit aff. Abb oder mit Leitkreis) 24

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Vorwort

Es gibt verschiedene Wege, die zu Ellipsen führen. Dies wird in mehreren Texten aufgearbeitet. Hier eine kurze Übersicht.

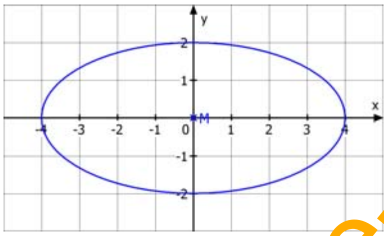
1. Eine Ellipse kann die geometrische Darstellung der Lösungsmenge einer Gleichung mit 2 Unbekannten sein.

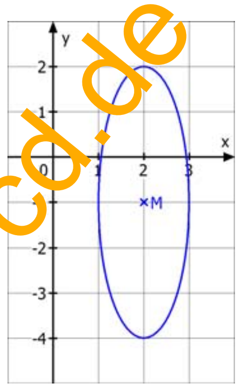
   Beispiele sind:

   a) $x^2 + 4y^2 = 16$

   b) $4(x-2)^2 + y^2 = 4$

   c) $x^2 + 3x - y^2 + y = 2$ führt <u>nicht</u> zu einer Ellipse.

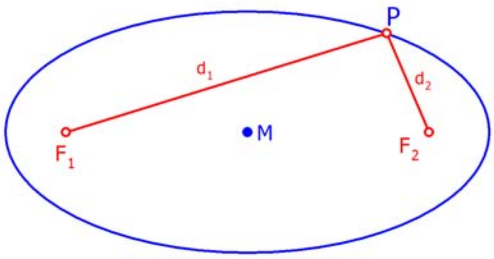




2. Man kann einen Kreis in einer bestimmten Richtung **dehnen**,

   Das Ergebnis ist eine Ellipse. (Das folgt in § 1)

3. Stellen Sie sich vor, dass zwei <u>feste</u> Punkte F_1 und F_2 gegeben sind.
   Nun suchen wir Punkte, deren Abstandssumme von F_1 und F_2 z. B. immer 12 ist.
   $d_1 + d_2 = 12$, unabhängig von der Lage von P,
   Diese Punkte liegen alle auf einer Ellipse.
   Die Punkte F_1 und F_2 heißen **Brennpunkte**.
   (Das folgt in §4).



4. Wie zeichnet man eine Ellipse?

Für das Zeichnen von Ellipsenpunkten zeige ich drei Methoden.

a) Man kann Ellipsenpunkte aus der Ellipsengleichung berechnen.

b) Man kann Ellipsenpunkte auch aus Kreispunkten konstruieren, indem man die Dehnung (Streckung) des Kreises zur Ellipse für diesen Punkt durchführt. Stichworte dazu sind „senkrecht-affine Abbildung“ und „Fähnchen-Konstruktion“.

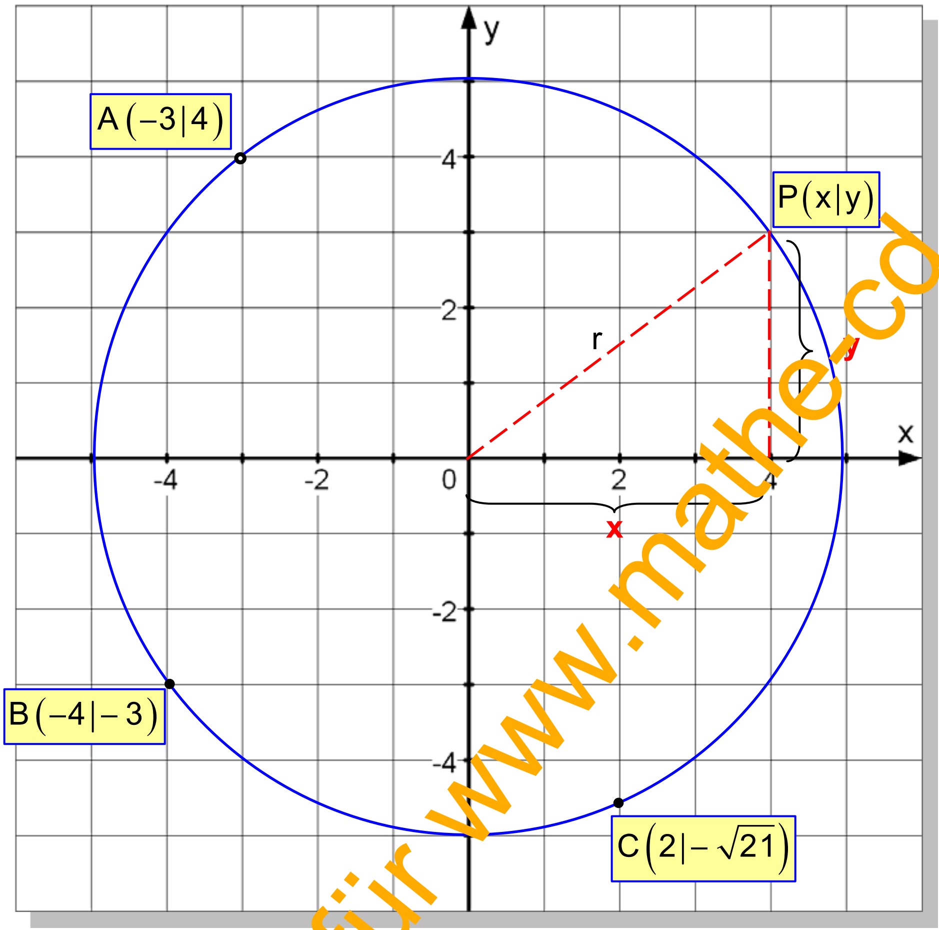
c) Man kann mit Hilfe der Abstandsdefinition und den Brennpunkten Punkte konstruieren. Dazu verwendet man den „Leitkreis“.

5. Ein wichtiges Thema ist auch:“ Wie stelle ich die Gleichung einer **Tangente** an eine Ellipse auf und wie konstruiert man sie? (§6 und 7)

Demo-Text für www.mathe-cd.de

§ 1 Ellipse als Streckbild eines Kreises

1.1 Voraussetzung: Grundkenntnisse über Kreisgleichungen



Demo-Text für www.mathe-cd.de

Ein Punkt $P(x|y)$ liegt auf einem Kreis K um den Mittelpunkt $O(0|0)$ wenn sein Abstand zu O stets konstant ist, man nennt ihn den Radius r. Dieser Abstand wird mit dem Satz des Pythagoras berechnet:

$$r = d(P,O) = \overline{OP} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Für Punkte eines Kreises um O gilt also: $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$,

Der dargestellte Kreis hat den Radius 5, also lautet seine **„Gleichung"**: $x^2 + y^2 = 25$.
Drei Punkte sind zur Kontrolle eingezeichnet. Wir können durch Einsetzen in diese Kreisgleichung überprüfen, ob sie wirklich auf dem Kreis liegen:

$A(-3|4)$: $(-3)^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ ist eine wahre Aussage: A liegt auf k.
$B(-4|-3)$: $(-4)^2 + (-3)^2 = 16 + 9 = 25$. B liegt auf k !

Den Punkt C habe ich so berechnet, dass ich $x_C = 2$ eingesetzt habe. Dann liefert die Kreisgleichung:

$4 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 = 21 \Rightarrow y_{1,2} = \pm\sqrt{21}$. Ich habe dann gewählt: $C(2|-\sqrt{21})$.
Im ersten Feld würde der zweite Punkt mit x = 2 liegen: $D(2|\sqrt{21})$.

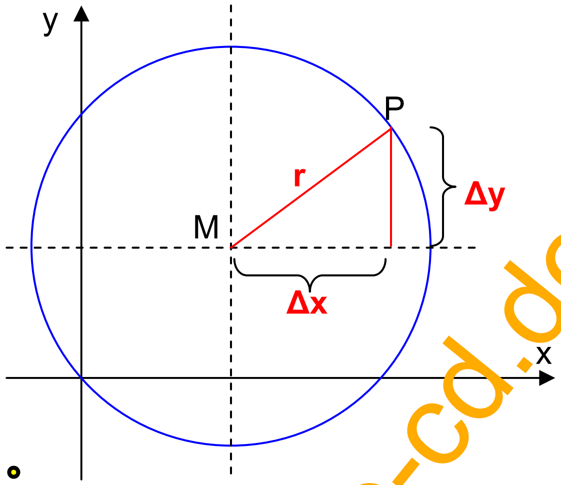
Liegt der Mittelpunkt nicht im Ursprung, folgt aus dem Satz des Pythagoras diese Gleichung:

Es sei $M(x_M|y_M)$ der Kreismittelpunkt und $P(x|y)$ ein beliebiger Punkt auf dem Kreis k, dann gilt nach Pythagoras:

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = r^2.$$

Mit $\Delta x = x - x_M$ und $\Delta y = y - y_M$ folgt dann die Gleichung des Kreises:

$$\boxed{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2}$$



Beispiel: $M(-3|-1)$ und $r = \sqrt{50}$ ergibt die Gleichung: $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 50$

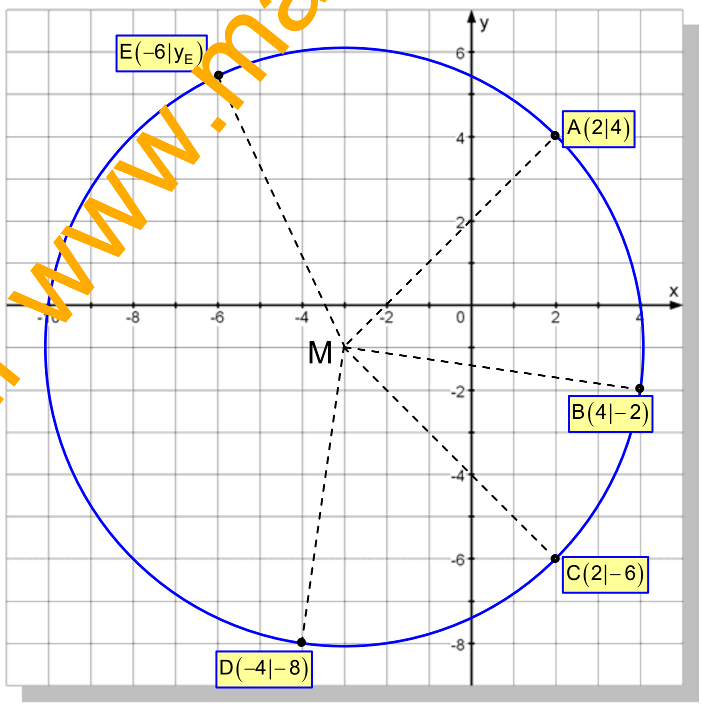
Wir kontrollieren einige Punkte:

$A(2|4) \in k$, denn
$$(2+3)^2 + (4+1)^2 = 25 + 25 = 50$$

$B(4|-2) \in k$, denn
$$(4+3)^2 + (-2+1)^2 = 49 + 1 = 50$$

$C(2|-6) \in k$, denn
$$(2+3)^2 + (-6+1)^2 = 25 + 25 = 50$$

$D(-4|-8) \in k$, denn
$$(-4+3)^2 + (-8+1)^2 = 1 + 49 = 50$$



Die y-Koordinate von E berechnen wir durch Einsetzen von $x_E = -6$ in die Kreisgleichung:

$$(-6+3)^2 + (y+1)^2 = 50 \Rightarrow (y+1)^2 = 41$$

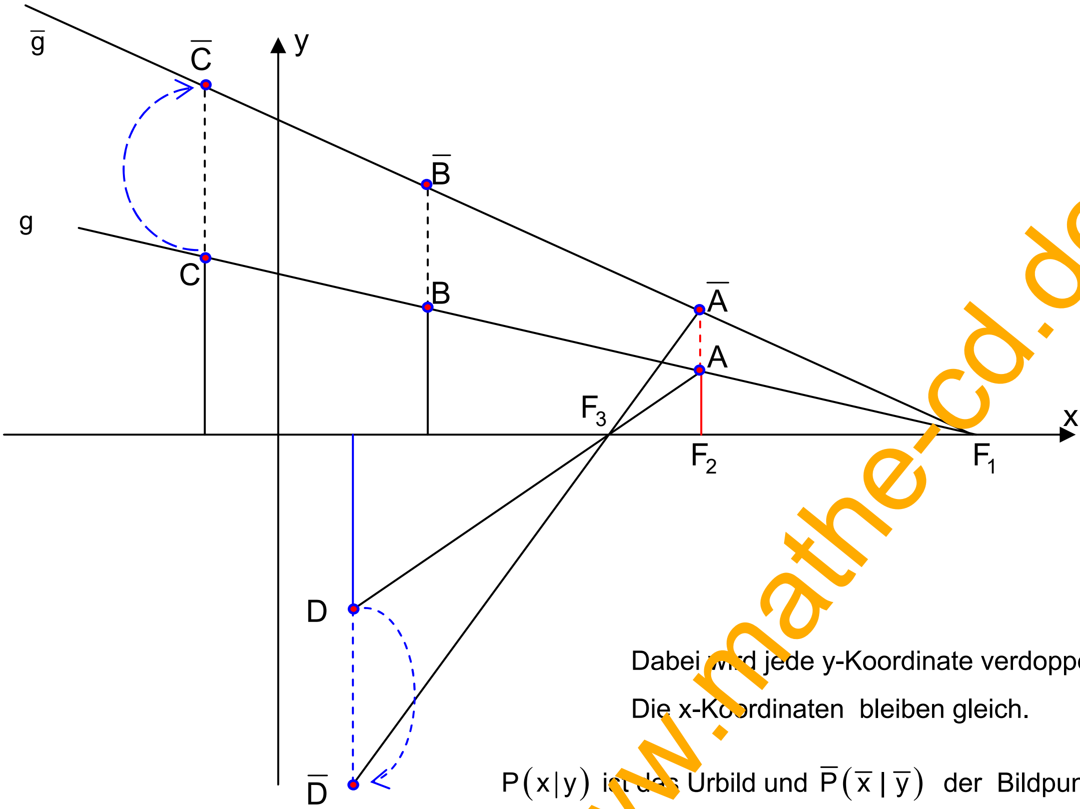
Also ist
$$y + 1 = \pm\sqrt{41} \Rightarrow y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{41}$$

Da E im 2. Feld liegt, scheidet die negative y-Koordinate aus und man erhält

$$E\left(-6 \middle| -1 + \sqrt{41}\right).$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1.2 Streckung in y-Richtung mit dem Streckfaktor s = 2



Dabei wird jede y-Koordinate verdoppelt.
Die x-Koordinaten bleiben gleich.

$P(x|y)$ ist das Urbild und $\overline{P}(\overline{x}\,|\,\overline{y})$ der Bildpunkt.

<u>Es gelten diese Abbildungsgleichungen für Punkte</u>: $\left\{\begin{matrix}\overline{x} = x \\ \overline{y} = 2y\end{matrix}\right\}$ (1).

Zum Beispiel: $A(6|1) \to \overline{A}(6|2)$, ferner $B(2|2) \to \overline{B}(2|4)$ und $C(-1|\frac{9}{4}) \to \overline{C}(-1|\frac{9}{2})$.
Punkte unterhalb der x-Achse „wandern" nach unten: $D(1|-2{,}5) \to \overline{D}(1|-5)$.

Punkte auf der x-Achse sind allerdings **Fixpunkte:** $\mathbf{F_1 = \overline{F}_1}$ **und** $\mathbf{F_2 = \overline{F}_2}$

***<u>Um eine Gerade oder eine Kurve abzubilden</u>*, muss man die Abbildungs-gleichungen nach x und y umstellen, damit man sie in einsetzen kann:**

Beispiel: Die Gerade g durch A, B und C hat die Gleichung $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$ .und soll abgebildet werden.

(1) umstellen nach x und y zum Einsetzen: $\left\{\begin{matrix}\overline{x} = x \\ \overline{y} = 2y\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\mathbf{x = \overline{x}} \\ \mathbf{y = \frac{1}{2}\overline{y}}\end{matrix}\right\}$. (2)

Damit wird aus g: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$ die Gleichung von $\overline{g}$:

$\frac{1}{2}\overline{y} = -\frac{1}{4}\overline{x} + \frac{5}{2} \quad \big| \cdot 2$ ergibt $\overline{y} = -\frac{1}{2}\overline{x} + 5$

Nach der Berechnung dieser Gleichung lässt man die Querstriche in der Gleichung weg, denn man braucht sie nur zur Umrechnung, um Bild und Urbild zu unterscheiden: $\overline{g}:\quad y = -\frac{1}{2}x + 5$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

(1) Mit den Abbildungsgleichungen $\begin{Bmatrix}\bar{x} = x \\ \bar{y} = s\,y\end{Bmatrix}$ berechnet man die Koordinaten der Bildpunkte.

(2) Um die Gleichung einer Bildgeraden oder Bildkurve zu berechnen, stellt man die Abbildungsgleichungen nach x und y um $\begin{Bmatrix}x = \bar{x} \\ y = \frac{1}{s}\bar{y}\end{Bmatrix}$ so dass man sie in die Ur-Gleichung einsetzen kann.
Danach darf man die Querstriche wieder weglassen.

Konstruktionsmöglichkeit für Bildpunkte.

Hierzu muss man folgendes wissen: Damit man die Stärke der Streckung kennt, muss ein Punkte-Paar gegeben sein, etwa A und $\bar{A}$. Dann kann man zu jedem weiteren Punkt den Bildpunkt konstruieren.

Konstruktion von $\bar{B}$:

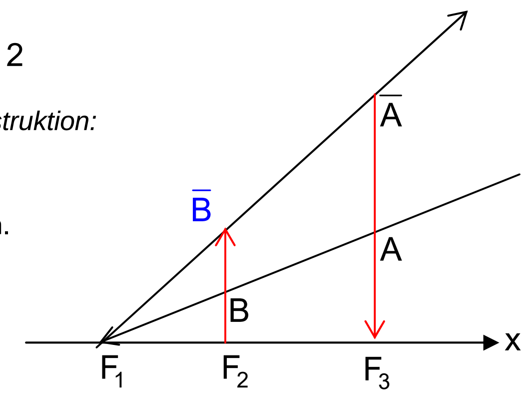
Man verbindet A und B und ermittelt den Schnittpunkt F_1 mit der x-Achse.
F_1 ist ein Fixpunkt, da er bei der Streckung unverändert bleibt.
Dann zeichnet man die Bildgerade $g = (F_1\bar{A})$ ein und die Parallele zur y-Achse durch B. Beide Linien schneiden sich im Bildpunkt $\bar{B}$.

Hierzu eine Abbildung mit dem Streckfaktor s = 2

Die dünnen Pfeilspitzen zeigen die Reihenfolge der Konstruktion:

Zuerst die Gerade (AB) mit der x-Achse schneiden,
ergibt den Fixpunkt F_1, dann die Gerade $(F_1\bar{A})$ zeichnen.

Dann zeichnet man die Parallele zu $(A\bar{A})$ durch B
und man erhält den gesuchten Bildpunkt $\bar{B}$.



Diese Konstruktion gilt auch für Punkte unterhalb der x-Achse, also um aus D den Bildpunkt $\bar{D}$ zu konstruieren. Dabei kreuzen sich die Geraden im Fixpunkt.
Siehe Abbildung auf der nächsten Seite.

Man erkennt in der Abbildung (am sog. 3. Strahlensatz: $\frac{\overline{\bar{B}F_2}}{\overline{BF_2}} = \frac{\overline{\bar{A}F_3}}{\overline{AF_3}} = \frac{2}{1} = s$),
dass der Streckfaktor 2 mit dieser Konstruktion überall realisiert wird.

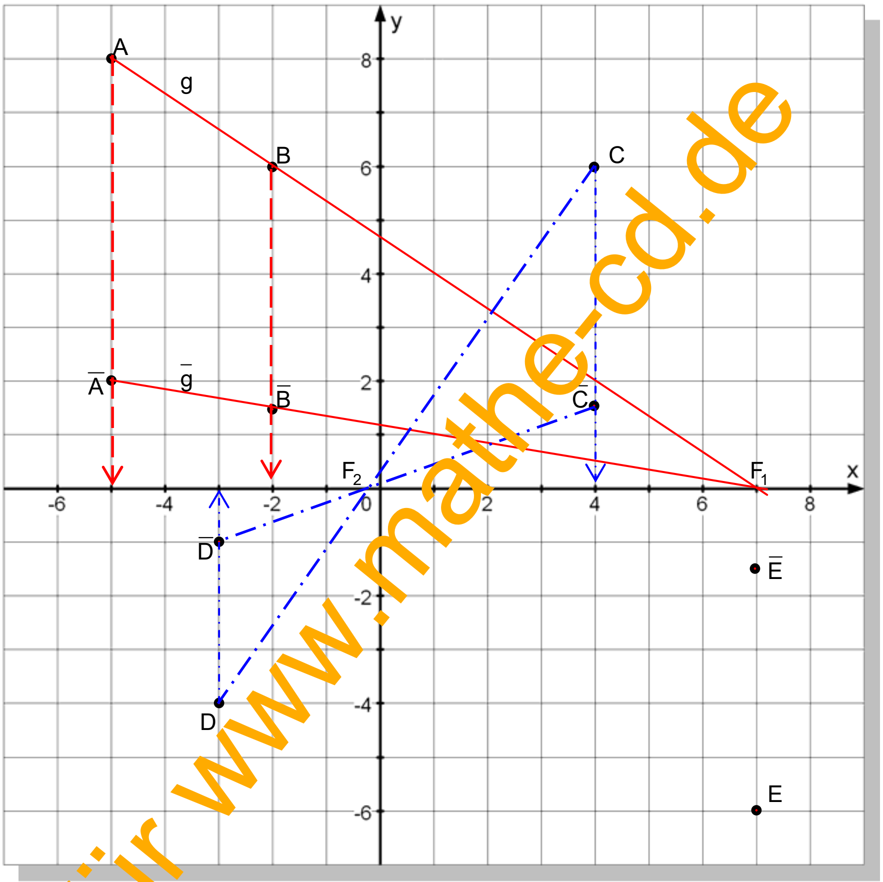
Demo-Text für www.mathe-cd.de

Streckung in y-Richtung mit Streckfaktor $s = \frac{1}{4}$.

Jetzt werden alle y-Koordinaten auf ein Viertel gestaucht (man spricht dennoch von einer „Streckung"), die Punkte rücken also zur x-Achse hin.

Abbildungsgleichungen:

$\begin{Bmatrix} \bar{x} = x \\ \bar{y} = \frac{1}{4} y \end{Bmatrix}$.



Die y-Koordinaten der Bildpunkte sind alle ein Viertel der y-K. des Urbildes.

Und man erkennt auch die Konstruktion mit dem Strahlensatz.

Wenn etwa A und $\bar{A}$ gegeben ist, und man soll den Bildpunkt zu B konstruieren, dann verbindet man AB .

Diese Linie schneidet die x-Achse im Fixpunkt F_1. Die Bildgerade von (AB) ist dann $(F_1\bar{A})$.

Und darauf liegt $\bar{B}$, direkt unterhalb von B.

Man kann diese Konstruktion auch auf der anderen Seite durchführen.

Die Abbildung zeigt (blau) diese Situation: Aus bekannten Punkten C und $\bar{C}$ kann man den Bildpunkt von D konstruieren. Dazu benötigt man den Fixpunkt F_2.

Das Bild von (CD) ist jetzt $(\bar{C}F_2)$ und $\bar{D}$ liegt genau über D.

Es sind noch zwei Punkte E und $\bar{E}$ eingezeichnet. Mit ihnen kann man dies nochmals ausprobieren (etwa mit C und $\bar{C}$.

Rechnung dazu: Abbildung der Geraden g = (AB):

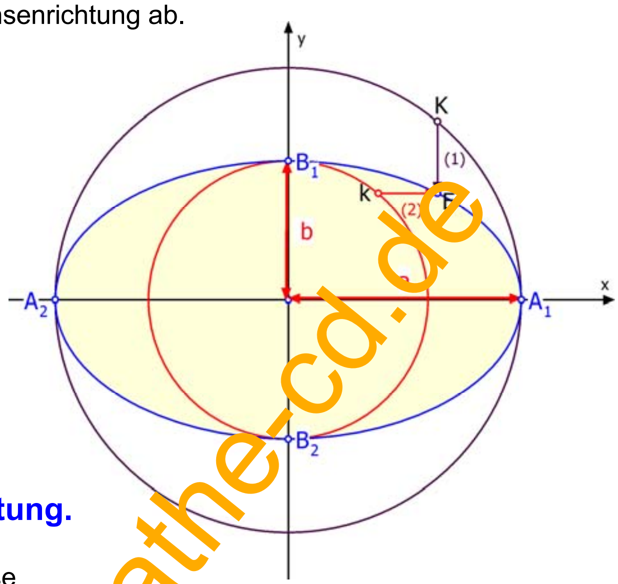
Die Gerade g = (AB) hat die Gleichung $y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$. Will man die Gleichung der Bildgeraden $\bar{g}$, muss man die Abbildungsgleichungen umstellen und einsetzen:

$\begin{Bmatrix} \bar{x} = x \\ \bar{y} = \frac{1}{4} y \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = \bar{x} \\ y = 4\bar{y} \end{Bmatrix}$ ergibt $\bar{g}:\ 4\bar{y} = -\frac{2}{3}\bar{x} + \frac{14}{3}$ bzw. $\bar{y} = -\frac{1}{6}\bar{x} + \frac{7}{6}$.

Ohne die Querstriche in der Gleichung: $\bar{g}:\ y = -\frac{1}{6}x + \frac{7}{6}$.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1.3 Ellipse als senkrecht-affines Bild eines Kreises



Wir bilden einen Ursprungskreis durch eine Streckung in Achsenrichtung ab.
Dazu betrachten wir zwei Möglichkeiten:

1. Möglichkeit: Stauchung in y-Richtung mit 0<s<1
Dann ist der Großkreis K das Urbild, das in y-Richtung zusammengedrückt wird. Aus K wird dann E, die Ellipse.

2. Möglichkeit: Streckung in x-Richtung mit 0<s<1
Dann ist der Kleinkreis k das Urbild, das in x-Richtung gedehnt wir. Aus k wird dann E, die Ellipse.

(1) Beginnen wir mit der Stauchung in y-Richtung.

Eine senkrecht-affine Abbildung in y-Richtung mit der x-Achse als Fixpunktgerade hat diese Abbildungsgleichungen:

$$\begin{Bmatrix} x' = x \\ y' = s \cdot y \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \vec{x}$$

Um die Kreisbezeichnung k nicht mit dem Streckfaktor k zu verwechseln, bezeichne ich jetzt den Streckfaktor mit s.

Ist 0 < s < 1, dann wird der abzubildende Kreis K in y-Richtung zusammengedrückt zur Ellipse E.

Das Urbild ist also der Kreis K mit Radius a: $x^2 + y^2 = a^2$

Um K abzubilden, muss man die Abbildungsgleichung umstellen: $\begin{Bmatrix} x = x' \\ y = \frac{1}{s} y' \end{Bmatrix}$

damit man sie einsetzen kann: K': $x'^2 + \frac{1}{s^2} y'^2 = a^2$

Dividiert man durch a^2, folgt: $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{s^2 a^2} = 1$

Für die Ellipsengleichung führt man ein: $b = s \cdot a$.
Und man lässt die Striche weg, die man zur Unterscheidung von Kreis und Bildkurve benötigt hat:

Ellipse: $$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Die Ellipse hat zwei **Hauptscheitel**: $A_1(a \mid 0)$ und $A_2(-a \mid 0)$, oft auch H_1 und H_2 genannt
und zwei **Nebenscheitel**: $B_1(0 \mid b)$ und $B_2(0 \mid -b)$, oft auch N_1 und N_2 genannt.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

(2) Alternativ kann man den Kreis k in x-Richtung strecken.

Eine senkrecht-affine Abbildung mit der y-Achse als Fixpunktgerade hat diese Abbildungsgleichungen:

$$\left\{\begin{matrix} x' = s\cdot x \\ y' = y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \vec{x}' = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$$

Ist s > 1, dann wird der abzubildende Kreis k in x-Richtung gedehnt zur Ellipse E.

Das Urbild ist also der Kreis k mit Radius b: $x^2 + y^2 = b^2$

Um K abzubilden, muss man die Abbildungsgleichung umstellen: $\left\{\begin{matrix} x = \frac{1}{s}x' \\ y = y' \end{matrix}\right\}$

damit man sie einsetzen kann: $K': \frac{1}{s^2}x'^2 + y'^2 = b^2$

Dividiert man durch b^2, folgt: $\frac{x'^2}{s^2b^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$

Für die Ellipsengleichung führt man ein: $a = s\cdot b$.

Und man lässt die Striche weg, die man zur Unterscheidung von Kreis und Bildkurve benötigt hat:

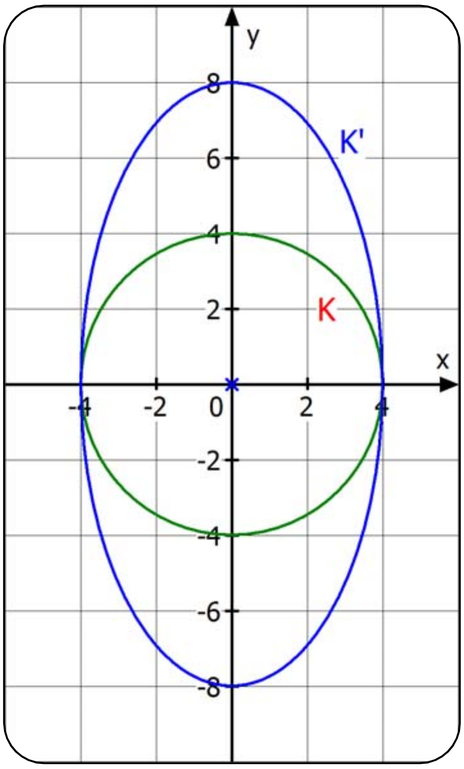
Ellipse: $\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

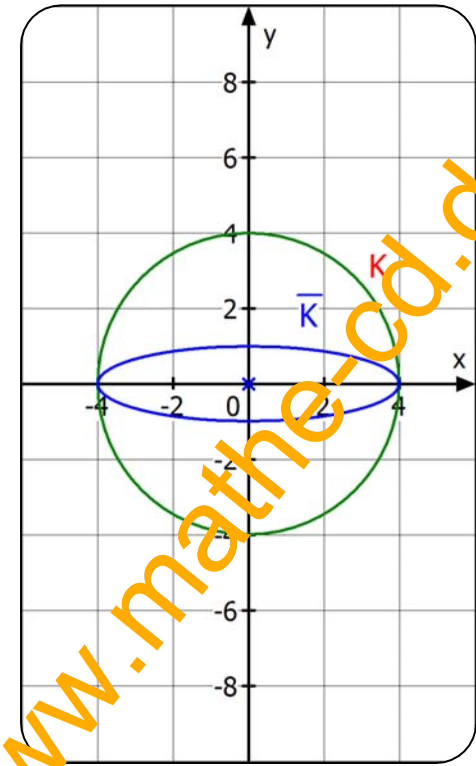
In unserer Abbildung auf der Seite zuvor ist a > b, das hat zur Folge, dass wir eine „liegende Ellipse“ bekommen. Auf der nächsten Seite folgt eine „stehende Ellipse“, bei der dann a < b ist.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

(3) Man kann einen Kleinkreis auch in y-Richtung dehnen

Dies schauen wir uns an einem Doppel-Beispiel an: Wir strecken den Kreis $x^2 + y^2 = 16$ in y-Richtung.





Der Streckfaktor s = 2 verdoppelt … **Der Streckfaktor s = $\frac{1}{4}$ verkleinert…**

alle y-Koordinaten, so dass aus dem Kreis eine Ellipse wird.

Wir wollen die Gleichungen der beiden Ellipsen aus $K:\ x^2 + y^2 = 16$ herleiten

Links: $\begin{Bmatrix} \overline{x} = x \\ \overline{y} = 2y \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = \overline{x} \\ y = \frac{1}{2}\overline{y} \end{Bmatrix}$

$K':\ \overline{x}^2 + \frac{1}{4}\overline{y}^2 = 16$

$K':\ x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 16$

Rechts: $\begin{Bmatrix} \overline{x} = x \\ \overline{y} = \frac{1}{4}y \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = \overline{x} \\ y = 4\overline{y} \end{Bmatrix}$

$\overline{K}:\ \overline{x}^2 + 16\overline{y}^2 = 16$

$\overline{K}:\ x^2 + 16y^2 = 16$

Diese Gleichungen haben nun noch nicht die endgültige Form. Dazu sollte rechts 1 stehen:

Also wird abschließend durch 16 dividiert.

$K':\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{64} = 1$ bzw. $\overline{K}:\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

$a = 4,\ b = 8$ $a = 4,\ b = 1$

Stehende Ellipse mit a < b Liegende Ellipse mit a > b

Warum man das macht, folgt sofort!

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1.4 Allgemeine Gleichung einer Ursprungsellipse.

Abbildungsgleichungen der Streckung in y-Richtung:

$$\left\{\begin{array}{l}\bar{x}=x\\ \bar{y}=sy\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\bar{x}\\ y=\frac{1}{s}\bar{y}\end{array}\right\}$$

Das Urbild ist der Ursprungskreis: $x^2+y^2=r^2$

Berechnung der Ellipsengleichung durch Einsetzen:

$$\bar{x}^2+\left(\frac{1}{s}\bar{y}\right)^2=r^2$$

$$\bar{x}^2+\frac{\bar{y}^2}{s^2}=r^2 \quad \Big| :r^2$$

$$\frac{\bar{x}^2}{r^2}+\frac{\bar{y}^2}{s^2r^2}=1$$

Weglassen der Querstriche in der Gleichung:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{s^2r^2}=1$$

Umbenennung:

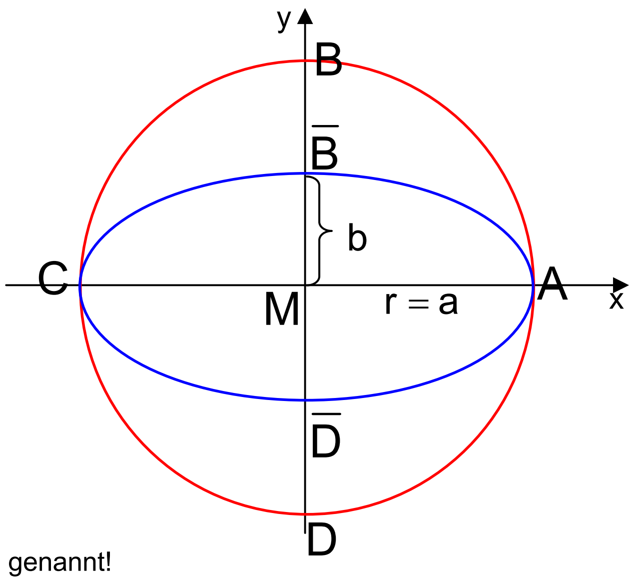
Wir setzen $\mathbf{a=r}$ und $\mathbf{b=sr}$.

Das ergibt

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Bedeutung der Größen a und b:.



Die vier Kreisscheitel sind *hier:*

$A(r|0);B(0|r);C(-r|0);D(0|-r)$.

Aus ihnen werden durch die Streckung (die hier eine Stauchung ist) die vier Ellipsenscheitel $A;\bar{B};C$ und $\bar{D}$.

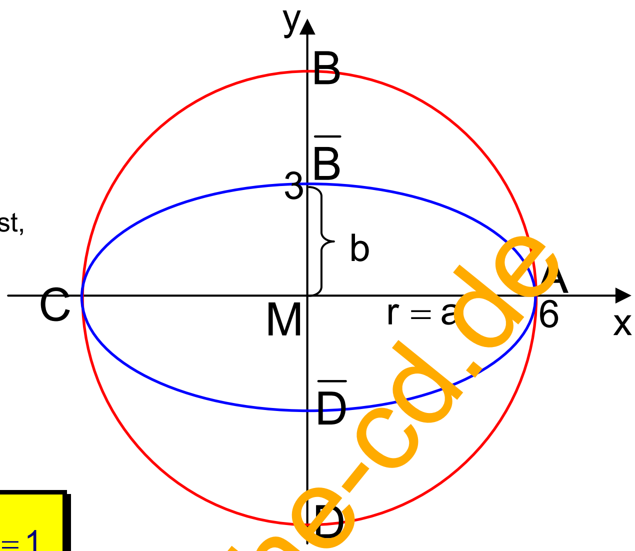
Die y-Koordinate b von $\bar{B}$ kann man mit der Abbildungsgleichung berechnen:

$\overline{y_B}=s\cdot y_B=s\cdot r$.

Und genau das haben wir in der Gleichungsherleitung b genannt!

Wir merken uns also:

In der Gleichung $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$



gibt a die erste Halbachse an, die bei diesem Beispiel mit dem Radius des Urbild-Kreises identisch ist, und b gibt die verkürzte zweite Halbachse an, also bei dieser Lage die „kleine" Halbachse.

In unserer Abbildung sei a = 6.

Dann ist wegen $s=\frac{1}{2}$: $b = sa = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$.

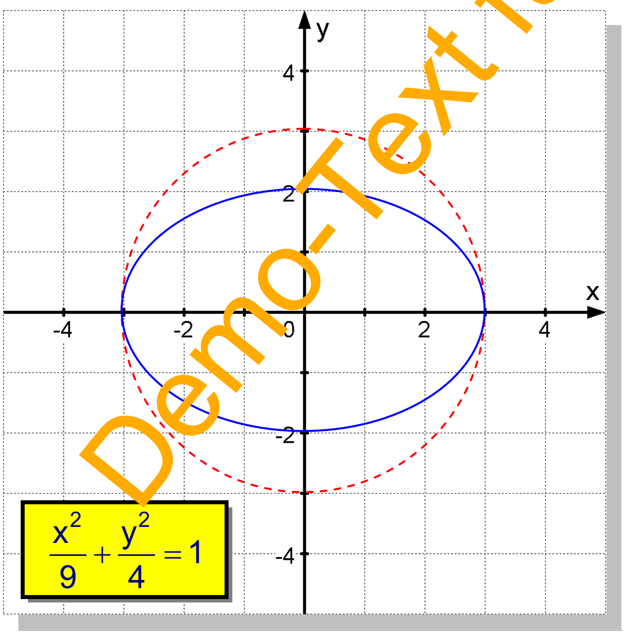
Also hat unsere Ellipse diese Gleichung $\boxed{\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1}$

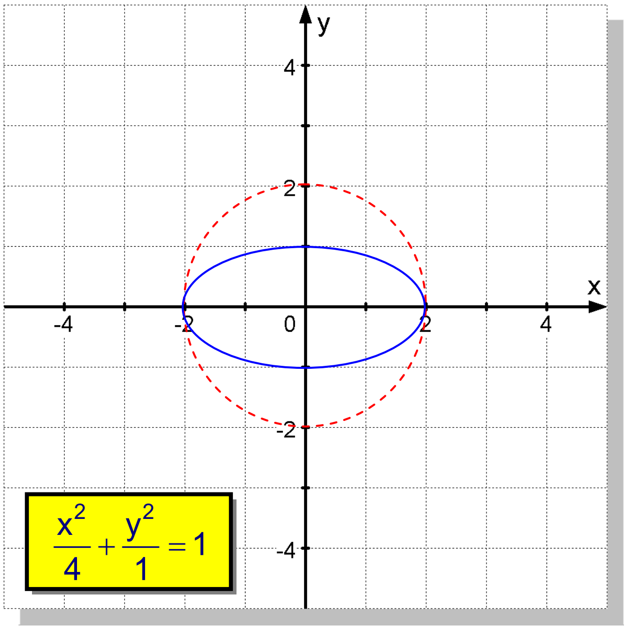
Wir merken uns ferner, dass der Streckfaktor s aus a und b berechnet werden kann:

$$\boxed{s=\frac{b}{a}}$$

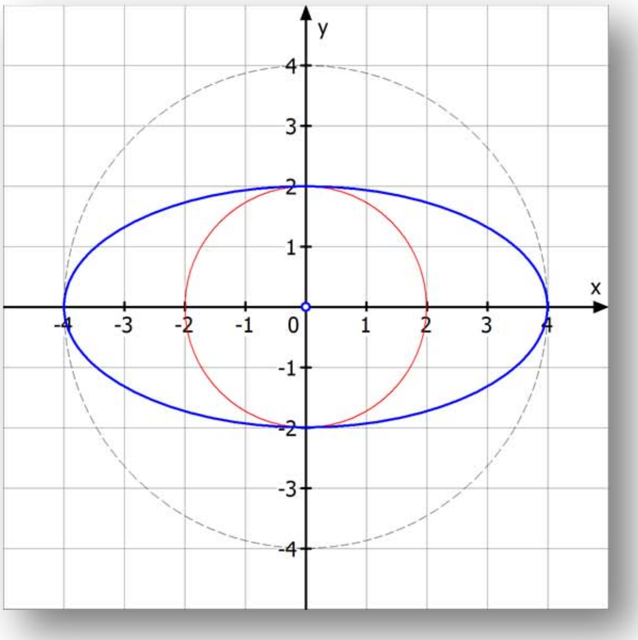
Beispiele für weitere Ellipsen und ihre Gleichungen.

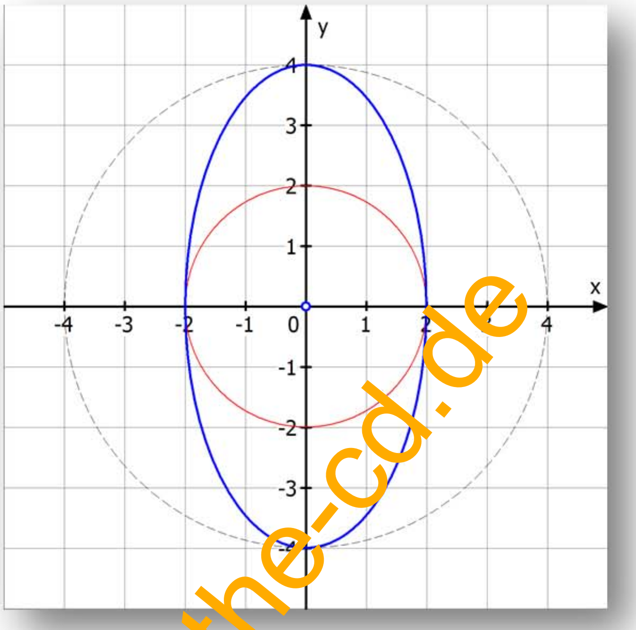
Gestrichelt ist immer der Ursprungskreis dargestellt, aus dem die Ellipse durch Dehnung (besser Stauchung) in y-Richtung entstanden ist.





Demo-Text für www.mathe-cd.de





Man kann die rechte Ellipse aus einem Kreis mit Radius 2 (dünn eingezeichnet) durch Dehnung in y-Richtung mit dem Faktor s = 2 erzeugen, oder durch Stauchung in x-Richtung mit dem Faktor s = 0,5 aus dem Kreis mit Radius 4.

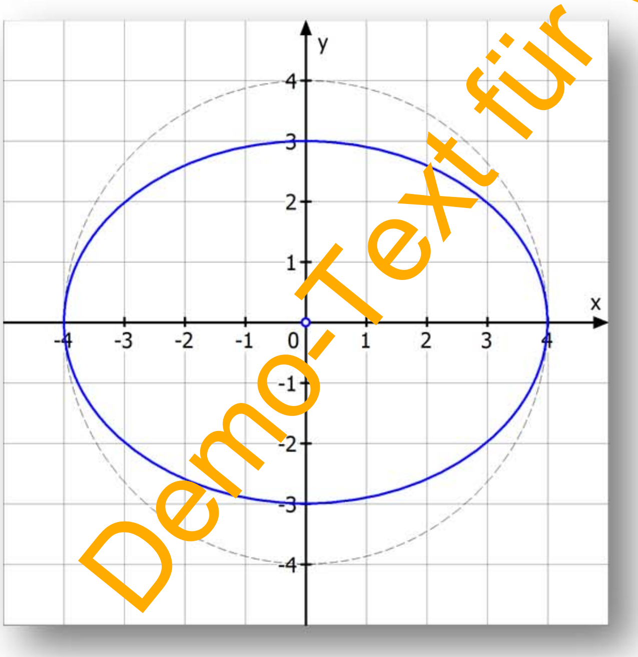
Die beiden Ellipsen sind kongruent, sie haben nur unterschiedliche Lagen:

Die linke Ellipse hat a = 4 und b = 2.

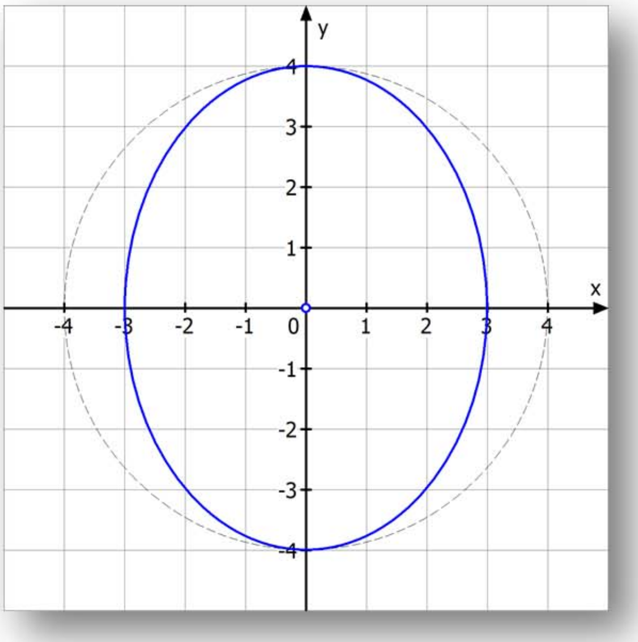
$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

Die rechte Ellipse hat a = 2 und b = 4

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$



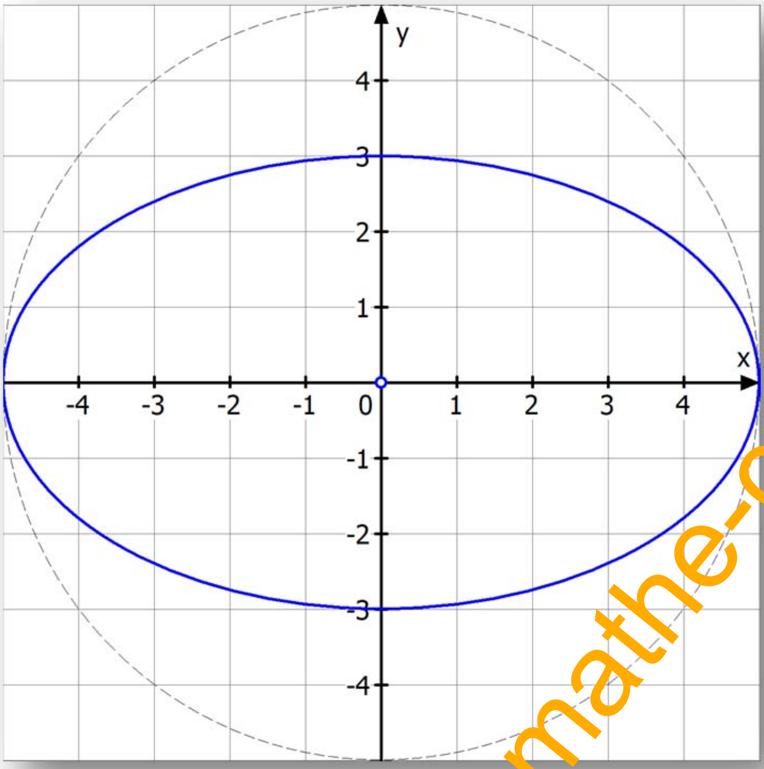
$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$



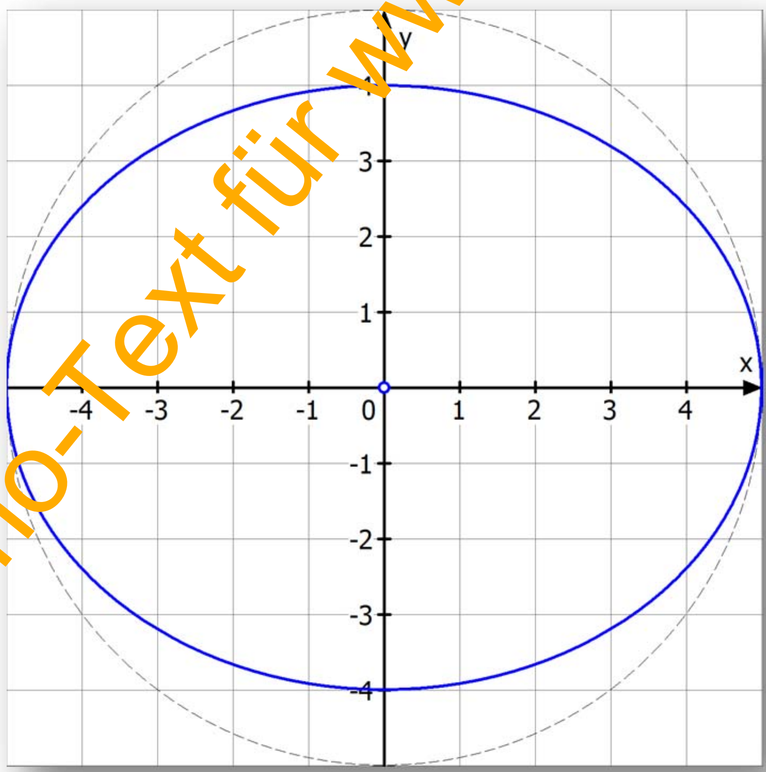
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$



$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$



Demo-Text für www.mathe-cd.de